# الترتيب و العمليات

## I _ مقارنة عددين حقيقيين :

### 1) – قاعدة ① :

لمقارنة عددين حقيقيين $b$ و $a$: نحدد إشارة فرقهما

إذا كان $a-b \geq 0$ فإن : $a \geq b$

إذا كان $a-b \leq 0$ فإن : $a \leq b$

### 2 – أمثلة :

**1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$**

**لدينا :**

$$\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)=2\sqrt{2}-4-\sqrt{3}+5$$
$$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4$$
$$=\sqrt{3}+1$$

**و بما أن :** $\sqrt{3}+1 \geq 0$ **فإن :** $\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right) \geq 0$

**و منه فإن :** $2\sqrt{3}-4 \geq \sqrt{3}-5$

2) -- لنقارن العددين : $x$ و $y$ بحيث : $x=y-3$ .

لدينا : $x-y=-3$

و بما أن : $-3 \leq 0$ فإن : $x-y \leq 0$ .

و منه فإن : $x \leq y$

## II _ الترتيب و العمليات :

### 1) – الترتيب و الجمع :

أ) -- خاصية ①

**$k$ و $b$ و $a$ أعداد حقيقية**

**إذا كان $a \leq b$ فإن : $a+k \leq b+k$**

**إذا كان $a \leq b$ فإن : $a-k \leq b-k$**

* مثال :

نعتبر $x$ عددا حقيقيا بحيث : $x<3$ .

لنقارن العددين $-2$ و $x-5$ .

لدينا : $x<3$

يعني أن :

$x+(-5)<3+(-5)$

$x-5<3-5$

و بالتالي فإن : $x-5<-2$

ب) -- خاصية ② :

$d$ و $c$ و $b$ و $a$ أعداد حقيقية .

**إذا كان** $\left.\begin{matrix} a\le b \\ c\le d\end{matrix}\right\}$ و **فإن** : $a+c\le b+d$

**مثال**

و $a+3\le 3$ و $b$ و $a$ عددان حقيقيان بحيث :
$b+4\le\sqrt{2}$

بين أن : $b+a+7\le 3+\sqrt{2}$

إذن : $(b+4)+(a+3)\le\sqrt{2}+3$ نعلم أن : $\left.\begin{matrix} b+4\le\sqrt{2} \\ a+3\le 3\end{matrix}\right\}$ و

و منه فإن : $b+a+7\le\sqrt{2}+3$

2) -- الترتيب و الضرب :

أ) -- خاصية ① :

$a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية .

إذا كان $a\le b$ و $c>0$ فإن $a\times c\le b\times c$

إذا كان $a\le b$ و $c<0$ فإن $a\times c\ge b\times c$

إذا كان $a\times c\le b\times c$ و $c>0$ فإن $a\le b$

إذا كان $a\times c\ge b\times c$ و $c<0$ فإن $a\le b$

* مثال :

لدينا : $11\le 27$ يعني أن $11\times 5\le 27\times 5$

$11\le 27$ يعني أن $11\times(-4)\ge 27\times(-4)$

ب) -- خاصية ② :

$a$ و $b$ و $c$ و $d$ أعداد حقيقية .

$a\le b$

$c\le d$

إذا كان و فإن $a\times c\le b\times d$

*** مثال :**

$x$ و $y$ عددان حقيقيان موجبان بحيث :

$x<\sqrt{3}$ و $y<2\sqrt{6}$ .

لنبين أن : $xy<6\sqrt{3}$ .

لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} x<\sqrt{3} \\ y<2\sqrt{6} \end{array}\right\} \text{و}$$

يعني أن :

$$x\times y<\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}$$
$$xy<2\sqrt{3\times 6}$$
$$xy<2\sqrt{18}$$
$$xy<2\sqrt{9\times 2}$$
$$xy<2\sqrt{3^2\times 2}$$
$$xy<2\times 3\sqrt{2}$$

وبالتالي فإن :

$$xy<6\sqrt{2}$$

## 3) – الترتيب و المقلوب :

**أ -- خاصية :**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان قطعا .

إذا كان $a\leq b$ فإن $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$

إذا كان $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$ فإن $a\leq b$

**ب -- مثال :**

لدينا : $7\leq 13$ يعني أن $\frac{1}{7}\geq\frac{1}{13}$

$11\geq 5$ يعني أن $\frac{1}{11}\leq\frac{1}{5}$

## 4) – الترتيب و المربع :

**أ -- خاصية ① :**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان .

إذا كان $a\leq b$ فإن $a^2\leq b^2$

إذا كان $a^2\leq b^2$ فإن $a\leq b$

**مثال :**

$5\leq 11$ يعني أن $5^2\leq 11^2$ أي $25\leq 121$ .

**ب -- خاصية ② :**

$a$ و $b$ عددان حقيقيان سالبان .

إذا كان $a\leq b$ فإن $a^2\geq b^2$

إذا كان $a^2\geq b^2$ فإن $a\leq b$

*** مثال :**

$-7\leq -2$ يعني أن $(-7)^2\geq(-4)^2$

أي $49\geq 16$

## 5) – الترتيب و الجذر المربع :

### أ) -- خاصية :

$a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان .

إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن $a \leq b$

### أمثلة :

1) – لنقارن العددين : $\sqrt{10}$ و $3\sqrt{3}$ .

لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{10}^2 = 10 \\ \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 27 \end{array}\right\}$$

و إذن $\sqrt{10}^2 \leq \left(3\sqrt{3}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{10} \leq 3\sqrt{3}$

2) – لنقارن العددين : $-\sqrt{6}$ و $-3\sqrt{2}$ .

لدينا :

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{6}^2 = 6 \\ \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \end{array}\right\}$$

و إذن $\sqrt{6}^2 \leq \left(3\sqrt{2}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{6} \leq 3\sqrt{2}$ .

و بالتالي فإن : $-\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}$

## III _ التأطيـر :

خاصية 1

**$a$ و $t$ و $z$ و $y$ و $x$ و $b$ أعداد حقيقية بحيث :**

$x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$

$x + z \leq a + b \leq y + t$

**مثال**

$y$ و $x$ عددان حقيقيان بحيث : $-4 \leq y \leq \frac{-3}{2}$ و $1 \leq x \leq \sqrt{5}$

لنؤطر: $x + y$

لدينا : $-4 \leq y \leq \frac{-3}{2}$ و $1 \leq x \leq \sqrt{5}$

يعني أن : $1 + (-4) \leq x + y \leq \sqrt{5} + \left(\frac{-3}{2}\right)$

أي : $-3 \leq x + y \leq \sqrt{5} - \frac{3}{2}$

**خاصية 2**

**$a$ و $y$ و $x$ أعداد حقيقية بحيث : $x \leq a \leq y$**

$-y \leq -a \leq -x$

مثال

$x$ عدد حقيقي بحيث : $\sqrt{3} \le x \le 4$

لنؤطر $-x$ : $-4 \le -x \le -\sqrt{3}$

**خاصية 3**

$a$ و $t$ و $z$ و $y$ و $x$ و $b$ أعداد حقيقة بحيث :

$x \le a \le y$ و $z \le b \le t$

$x - t \le a - b \le y - z$

مثال

$y$ و $x$ عددان حقيقيان بحيث : $-4 \le y \le \frac{-3}{2}$ و $1 \le x \le \frac{5}{2}$

لنؤطر: $y - x$

لدينا : $1 \le x \le \frac{5}{2}$ إذن : $-\frac{5}{2} \le -x \le -1$

يعني أن : $(-4) + \left(\frac{-5}{2}\right) \le y + (-x) \le \left(\frac{-3}{2}\right) + (-1)$

$\frac{-13}{2} \le y - x \le \left(\frac{-5}{2}\right)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|